Prüfungsprotokoll

Stoff: Stochastische Prozesse und stochastische Analysis 1
Prüfer: Professor Eberle
Note: 1.3

Wie üblich ließ mich Professor Eberle das Einstiegsthema selbst wählen. Ich entschied mich für die Brownsche Bewegung. Zunächst die Definition. Bei der Unabhängigkeit der Inkremente drückte ich mich etwas ungenau aus. Bei der Nachfrage setzte dann vor Nervösität mein Denkvermögen kurzzeitig aus. Aber Professor Eberle fragte mit unglaublicher Geduld so lange immer präziser nach bis ich die notwendige Überschneidungsfreiheit der Inkremente formuliert hatte.
Jetzt kam die Existenz. Ich began mit der Wiener-Levy-Konstruktion. Zunächst erwähnte ich die Wahl der Schauderfunktionen als ONB. Ein Hinzeichnen der Funktionen genügte. Dann schrieb ich die entsprechenden Approximationen auf:
$B_t(\omega) = Y(\omega)e(t) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1} Y_{n,k}(\omega)e_{n,k}(t)$, wobei e, $e_{n,k}$ die Schauderfunktionen bezeichnen und Y, $Y_{n,k}$ iid und $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt sind.
Bei der Konvergenz kam ich dann noch mal etwas durcheinander (die Reihe konvergiert fast sicher gleichmäßig in t).
Professor Eberle merkte das ich einen kleinen Blackout hatte und ging erstmal zu diskreten Martingalen über. Ich nannte Definition, L^2-Martingalkonvergenzsatz und Supermartingalkonvergenzsatz. Bei dem Supermartingalkonvergenzsatz fragte er dann nach dem Beweis. Hier reichte schon fast das Stichwort „Upcrossingungleichung", wobei er sich nochmal an einem Bild verdeutlichen ließ, was ein Upcrossing ist.
Jetzt ging es in Stochastische Analysis über: Sei B eine Brownsche Bewegung. Wann ist dann $h(B_t)$ ein Martingal? Noch völlig im diskreten antwortete ich, wenn h harmonisch ist und fing an mit Übergangskernen zu argumentieren. Professor Eberle betonte nochmals das B eine Brownsche Bewegung ist. Also kam ich nach kurzer Verwirrung auf die Itô-Formel für Brownsche Bewegung:
Sei $F \in C^2(\mathbb{R})$ dann gilt f.s. $F(B_t) - F(B_0) = \int_0^t F'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(B_s)ds$.
Also folgt, wenn h$\in C^2(\mathbb{R})$ und $h'' = 0$ dann ist $h(B_t)$ ein lokales Martingal.
Jetzt sollte ich noch $\mathbf{E}[h(B_t)]$ für $B_0 = a$ bestimmen. Für h beschränkt, hat man mit der Überlegung von vorhin ein Martingal und der gesuchte Erwartungswert ist also a.
Jetzt folgte der Beweis der Itô-Formel. Ich schrieb die Taylorentwicklung hin und zeigte die entsprechenden Konvergenzen.
Abschließend wollte Professor Eberle noch wissen was der Knackpunkt bei der Itô-Isometrie im Raum M_c^2 ist. Ich erwähnte, dass es wichtig ist, dass der Raum abgschlossen ist und nach dem ich noch das Stichwort Maximalungleichung für den entsprechenden Beweis genannt hatte war die Prüfung vorbei.

Allgemein lässt sich sagen, dass Professor Eberle ein unglaublich geduldiger Prüfer ist, der einem bei Hängern ruhig und stressfrei wieder auf die Sprünge hilft. Anbetrachts meinens Blackouts zu Beginn der Prüfung und meiner anschließenden leichten Verwirrtheit war die Benotung überaus fair. Ich hatte den Eindruck, dass Professor Eberle durchaus Verständnis für den Prüfungsstress hat und darauf Rücksicht nimmt. Wenn man ihn nicht kennt, kann einen die Art des Fragens evtl. verwirren („Was fällt Ihnen denn zu Martingalen ein?“), aber wer sich schonmal mit ihm unterhalten hat, kann sich auf eine sehr angenehme Prüfung einstellen.Viel Erfolg dabei!!!