Räumlicher Poissonprozess

Prof. Dr. Roland M. Friedrich
Seminar Zeitstetige Markovketten und Anwendungen
Referent: Harald G. Grohganz

03. Juli 2007

1 Definitionen

Definition 1. *Eine abzählbare zufällige Menge $\Pi \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ wird* ***Poissonprozess*** *mit Intensität λ genannt, wenn für alle $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ die Zufallsvariable $N(A) = |\Pi \cap A|$ folgende Bedingungen erfüllt:*

a) $N(A)$ ist poissonverteilt mit Parameter $\Lambda(A) := \lambda \cdot |A|$.

b) Für disjunkte Mengen $A_1, ..., A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ sind $N(A_1), ..., N(A_n)$ unabhängige Zufallsvariablen.

Definition 2. *Sei $\lambda : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine nicht negative, meßbare Funktion mit $\int_A \lambda(x)dx < \infty$ für alle beschränkten Mengen A.*

Die abzählbare zufällige Menge $\Pi \subset \mathbb{R}^d$ wird ***inhomogener Poissonprozess*** *mit Intensitätsfunktion $\lambda(x)$ genannt, wenn für alle $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ die Zufallsvariable $N(A) = |\Pi \cap A|$ folgende Bedingungen erfüllt:*

a) $N(A)$ ist poissonverteilt mit Parameter $\Lambda(A) := \int_A \lambda(x)dx$.

b) Für disjunkte Mengen $A_1, ..., A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ sind $N(A_1), ..., N(A_n)$ unabhängige Zufallsvariablen.

Wir nennen die Funktion $\Lambda(A)$ für $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ ***Intensitätsmaß*** *des Prozesses Π.*

2 Sätze und Eigenschaften

Satz 1 (Überlagerungssatz)**.** *Für zwei unabhängige, inhomogene Poissonprozesse Π' und Π'' auf $\mathbb{R}^d$ mit dazugehörigen Intensitätsfunktionen λ' und λ'' ist die Menge $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$ wieder ein Poissonprozess mit der Intensitätsfunktion $\lambda = \lambda' + \lambda''$.*

Satz 2 (Abbildungssatz)**.** *Sei Π ein inhomogener Poissonprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensitätsfunktion λ, und sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s$ eine Abbildung mit $\Lambda(f^{-1}(y)) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^s$. Weiterhin gelte für alle beschränkten Mengen B:*

$$\mu(B) = \Lambda(f^{-1}B) = \int_{f^{-1}B} \lambda(x)\ dx < \infty$$

Dann ist $f(\Pi)$ ein inhomogener Poissonprozess auf $\mathbb{R}^s$ mit Intensitätsmaß μ.

Satz 3 (Konditionalitätssatz)**.** *Sei $\Pi \subset \mathbb{R}^d$ ein inhomogener Poissonprozess mit Intensitätsfunktion λ, und sei $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \Lambda(A) < \infty$. Mit $|\Pi \cap A| = n$ gilt:*

Die n in A liegenden Punkte haben dieselbe Verteilung wie n unabhängige, zufällig gewählte Punkte in A bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes

$$\mathbb{Q}(B) = \frac{\Lambda(B)}{\Lambda(A)} \qquad B \subseteq A.$$

Da $\mathbb{Q}(B) = \int_B \lambda(x)/\Lambda(A)\, dx$, ist $\lambda(x)/\Lambda(A)$ die Dichtefunktion für $x \in A$.

Bemerkung. Ist Π ein *homogener* Poissonprozess mit konstanter Intensität λ, so sind (unter der Bedingung $|\Pi \cap A| = n$) diese n fraglichen Punkte unabhängig gleichverteilt in A.

Satz 4 (Färbungssatz). *Sei Π ein inhomogener Poissonprozess mit Intensitätsfunktion $\lambda(x)$. Wir spalten nun Π auf, indem wir die Punkte von Π* unabhängig voneinander *einfärben:*

Ein Punkt $x \in \Pi$ wird mit Wahrscheinlichkeit $p_1(x)$ grün gefärbt, ansonsten mit der Wahrscheinlichkeit $p_2(x) := 1 - p_1(x)$ rot. Die Menge der grünen Punkte nennen wir Π_1 und die der roten Π_2.

Dann sind Π_1 und Π_2 unabhängige Poissonprozesse mit Intensitätsfunktionen

$$p_1(x)\lambda(x) \quad \textit{bzw.} \quad p_2(x)\lambda(x).$$

3 Simulation

EINGABE: Parameter $\lambda > 0$, Größe $n \in \mathbb{N}$.
AUSGABE: Poissonprozess auf $[0, n]^2$ mit konstanter Intensität λ.

1. Erzeuge n^2 poissonverteilte Zufallsvariablen N_{ij}, $\quad i, j = 1, ..., n$.

2. Für $i, j = 1, ..., n$:
Erzeuge N_{ij} unabh., gleichvert. Zufallsvariablen aus $(0, 1)^2$.
Verschiebe diese um (i, j).

Erzeugung einer poissonverteilten Zufallsvariable:

1. Setze $L := e^{-\lambda}, p := 1, k := 0$.

2. Solange $p \geq L$:
$k = k + 1$
$p = p \cdot rand$, $\quad$ wobei $rand$ i.i.d. aus $(0, 1)$

3. Übergebe $k - 1$.

Hinweis. Die Folien sowie eine textgleiche Druckversion (mit allen Abbildungen) dieses Vortrags sind auch im Internet abrufbar unter:

www.bluesquaregroup.de/studium/grohganz/inhalte.php

Literatur

[1] Grimmet, Geoffrey und David Stirzaker:
Probability and Random Processes, Oxford University Press, 2001.

[2] Knuth, Donald
Seminumerical Algorithms, The Art of Computer Programming, Addison Wesley, 1969.
zitiert in: *en.wikipedia.org/Poisson_ distribution*

[3] Course 7440, Section 2, Stochastic Simulation, Presentation 11:
Spatial Poisson Process, Institut of Applied Mathematics, University of Colorado, Fall 2004
amath.colorado.edu/courses/7400/2004fall/002/Web/SS-11.ppt